Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$
2. $u_n = \frac{n^2}{n(n-1)} + (0.7)^n$
3. $u_n = n^3 + 2n^2 - 5n + 1$
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n$
5. $u_n = (-1)^n$
6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}$

Solution :

1. *Pour tout réel* x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. *D'après le théorème des gendarmes :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{n^2}{n(n-1)} = \frac{n^2}{n^2}\frac{1}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $(0.7)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *car il s'agit d'une suite géométrique de raison* $0.7 \in]-1,1[$. *Donc par opérations sur les limites* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. $u_n = n^3+2n^2-5n+1 = n^3\left(1+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par opérations sur les limites.*
4. $u_n = 3^n - n^2 2^n = 3^n\left(1 - \dfrac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par application des relations de comparaisons et par opérations sur les limites.*
5. $u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. *On a ainsi extrait deux suites de la suite* u_n *qui admettent des limites différentes. Donc* (u_n) *diverge.*
6. $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \dfrac{n^2+n-n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par opérations sur les limites.*

Références