

# $1/2(p \circ u + u \circ p)$ , Mines MP 2003

Michel Quercia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

**Exercice 0.1** ★★  $1/2(p \circ u + u \circ p)$ , Mines MP 2003 Mines-Ponts MP

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  finie,  $p$  un projecteur de rang  $r$  et

$$\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), u \mapsto 1/2(p \circ u + u \circ p).$$

1. Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de  $\varphi$  et les dimensions des sous-espaces propres.

**Solution :**

1. Oui, les applications  $u \mapsto p \circ u$  et  $u \mapsto u \circ p$  le sont (ce sont des projecteurs) et elles commutent.
2. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  obtenue par concaténation d'une base de  $\text{Ker } p$  et d'une base de  $\text{Im } p$ .  
Si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ C/2 & D \end{pmatrix}$ , d'où  $\text{sp}(\varphi) \subset \{0, 1/2, 1\}$ ,  $d_0 = (n - r)^2$ ,  $d_1 = r^2$  et  $d_{1/2} = 2r(n - r)$ .

## Références