X MP* 2001

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***X MP* 2001 Polytechnique MP***

Soit f un endomorphisme de E (ev de dimension finie sur $\mathbb{K}$) tel que χ_f soit irréductible. Montrez que pour aucun endomorphisme g le crochet de Lie $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ n'est de rang un.

Solution : *Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$. Alors il existe $l \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :*

$$\forall x \in E,\ f(g(x)) - g(f(x)) = l(x)a.$$

D'où par récurrence sur k :

$$\forall x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = l(x)f^{k-1}(a) + l(f(x))f^{k-2}(a) + \cdots + l(f^{k-1}(x))a.$$

Comme χ_f est irréductible, le sous-espace f-monogène engendré par a est égal à E, soit : $(a, \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et $f^n(a) = \alpha_0 a + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(a)$.

Alors $\mu_f(f) = f^n - \alpha_{n-1} f^{n-1} - \cdots - \alpha_0 f^0 = 0$ et :

$$\forall x \in E,\ 0 = \mu_f(f)(g(x)) - g(\mu_f(f)(x)) = l(x)f^{n-1}(a) + \cdots + l(f^{n-1}(x) - \cdots - \alpha_1 x)a.$$

Ceci implique $l(x) = 0$ pour tout x, en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{rg}(f \circ g - g \circ f) = 1$.

Références