

$$f \circ g - g \circ f = \alpha f$$

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $f \circ g - g \circ f = \alpha f$

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle, E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Montrer pour tout entier naturel n : $f^n \circ g - g \circ f^n = n\alpha f^n$.
2. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$).
3. Donner un contre-exemple avec $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 0$.

Solution :

1. $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Références