Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un réel $\alpha \in]0,1[$ et une suite (u_n) convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Étudier la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k u_{n-k}$$

Solution : *Étudions d'abord le cas où (u_n) est constante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$ où $a \in \mathbb{R}$. On obtient alors facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = a\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{a}{1-\alpha}$. Ce cas particulier nous invite à conjecturer que que si (u_n) converge vers l, la suite (v_n) converge vers $l/(1-\alpha)$. Écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = l + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$v_n = l\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$$

Définissons la suite de terme général

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$$

et montrons que $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cela montrera que la suite (v_n) converge vers $l/(1-\alpha)$.

Coupons, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme en deux sous-sommes :

$$|\theta_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-N} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}| + \sum_{k=n-N+1}^{n} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon\,(1-\alpha)\,/2 > 0$. Comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \geqslant N$, $|\varepsilon_k| \leqslant \widetilde{\varepsilon}$.

Donc pour la première somme, si $n \geqslant N$:

$$\sum_{k=0}^{n-N} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}| \leqslant \widetilde{\varepsilon} \frac{1-\alpha^{n-N+1}}{1-\alpha} \leqslant \frac{\widetilde{\varepsilon}}{1-\alpha}.$$

En posant $M = \max(|\varepsilon_0|, \dots, |\varepsilon_{N-1}|)$, on majore la deuxième somme :

$$\sum_{k=n-N+1}^{n} |\alpha^k \varepsilon_{n-k}| \leqslant M \sum_{k=n-N+1}^{n} \alpha^k = \frac{M}{\alpha^{N-1}} \alpha^n \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \leqslant \frac{M}{\alpha^{N-1}(1-\alpha)} \alpha^n$$

car $\alpha \in \,]0,1[$. La suite $\left(\dfrac{M}{\alpha^{N-1}} \alpha^n \right)$ converge vers 0 (car c'est une suite géométrique de raison $\alpha \in \,]0,1[$) donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N'$, $\dfrac{M\alpha^n}{\alpha^{N-1}} \leqslant \widetilde{\varepsilon}$. Posons $N_1 = \max(N, N')$ et soit $n > N_1$.

Il vient finalement,

$$|\theta_n| \leqslant \frac{\widetilde{\varepsilon}}{1-\alpha} + \frac{\widetilde{\varepsilon}}{1-\alpha} = \varepsilon.$$

Références