$v \mapsto v \circ u$, Centrale MP 2003

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $v \mapsto v \circ u$***, Centrale MP 2003 Centrales MP***

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application Φ_u qui à $v \in \mathcal{L}(E)$ associe $v \circ u$.

1. *Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.*
2. *Montrer l'équivalence : (u est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ (Φ_u est diagonalisable)*
   (a) *en considérant les polynômes annulateurs de u et de Φ_u.*
   (b) *en considérant les spectres et sous-espaces propres de u et de Φ_u.*

Solution :

1. (a) *Pour $p \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(\Phi_u) = v \mapsto v \circ P(u)$ donc u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs.*
   (b) $(\lambda \in \operatorname{sp}(\Phi_u)) \Leftrightarrow (\exists v \neq 0$ *tq* $v \circ (u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0) \Leftrightarrow (u - \lambda \operatorname{id}_E$ *n'est pas surjectif*$) \Leftrightarrow (\lambda \in \operatorname{sp}(u))$. *Ainsi Φ_u et u ont même spectre. Si $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ on a :*

$$(\Phi_u(v) = \lambda v) \Leftrightarrow (\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker} v)$$

donc $\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{L}(E)})$ est isomorphe à $\mathcal{L}(H, E)$ où H est un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$. On en déduit : $\dim(\operatorname{Ker}(\Phi_u - \lambda \operatorname{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.

Références