$A^p = I_n$, Mines 2015

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $A^p = I_n$***, Mines 2015 Mines-Ponts***

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^p = I_n$. On suppose de plus qu'il existe $m \geq 3$ tel que, pour tous i, j, m divise $[A - I_n]_{i,j}$. Déterminer A.

Solution : *On écrit $A = I_n + mB$ avec $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$. Les valeurs propres de B sont de la forme $\dfrac{e^{2ik\pi/p} - 1}{m}$ avec $k \in \mathbb{Z}$; elles ont un module inférieur ou égal à $2/m < 1$. Le produit des valeurs propres non nulles, s'il y en a, est au signe près le coefficient de plus bas degré de χ_B donc un entier. On en déduit que $\mathrm{sp}(B) \subset \{0\}$ et B est $\mathbb{C}$-diagonalisable, comme A, d'où $B = 0$ et $A = I_n$.*

Références