

Trace entière, X MP* 2004

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ **Trace entière, X MP* 2004 Polytechnique MP**
Caractériser les polynômes P tels que : $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), (P(A) = 0) \Rightarrow (\text{tr}(A) \in \mathbb{Z})$.

Solution : Aucun polynôme constant ne convient. Si P est non constant et α est une racine de P alors en considérant $A = \alpha I_n$ on obtient une première condition nécessaire : $n\alpha \in \mathbb{Z}$. Si P a une autre racine β alors en prenant $A = \text{diag}(\alpha, \dots, \alpha, \beta)$ on obtient une deuxième condition nécessaire : $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}$. Ainsi les polynômes P cherchés ont la propriété suivante : $\deg(P) \geq 1$ et il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que toutes les racines de P sont congrues à u/n modulo 1. Cette condition est clairement suffisante.

Références