Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une suite (u_n) qui converge vers 0. On définit la suite (v_n) de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer que (v_n) converge vers 0.

Solution : *Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers 0, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$ alors $|u_n| \leqslant \varepsilon/2$. Par application de l'inégalité triangulaire, on peut écrire :*

$$\begin{aligned} |v_n| &= \frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{N_1} k u_k + \sum_{k=N_1+1}^{n} k u_k\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k\,|u_k| + \frac{1}{n^2}\sum_{k=N_1+1}^{n} k\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k\,|u_k| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

car $\sum_{k=N_1+1}^{n} k \leqslant n^2$. De plus, par opérations sur les limites, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k\,|u_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc un rang $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N_2$ alors $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N_1} k\,|u_k| \leqslant \varepsilon/2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$. On a alors $|v_n| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, ce qui prouve que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Références