Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

14 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

En utilisant les définitions **??** *et* **??**, *montrer que :*

1. $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* $0\cdot$
2. $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers* $0\cdot$
3. $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $0\cdot$
4. $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
5. $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
6. $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *tend vers* $+\infty$.

Solution :

1. *Voir l'exemple* **??** *page* **??**.
2. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On cherche un rang* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que si* $n \geqslant N$ *alors* $1/n^2 \leqslant \varepsilon$ *ou de manière équivalente* $1/n \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. *Posons* $N = E\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right) + 1$. *On a* $1/N \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N$. *On a bien :* $1/n^2 \leqslant 1/N^2 \leqslant \varepsilon$ *et donc* $1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On cherche un rang* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que si* $n \geqslant N$ *alors* $1/2^n \leqslant \varepsilon$ *ou de manière équivalente* $n \geqslant \frac{\ln\varepsilon}{\ln(1/2)}$. *Posons* $N = E\left(\frac{-\ln\varepsilon}{\ln(1/2)}\right) + 1$ *(on peut supposer* $\varepsilon \in]0,1[$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $n \geqslant N$. *Alors* $1/2^n \leqslant 1/2^N < \varepsilon$ *et donc* $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
4. *Soit* $M \in \mathbb{R}$. *On peut choisir* M *positif sans que cela ne particularise la démonstration. On cherche un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geqslant N$ *alors* $n^2 \geqslant M$ *ou de manière équivalente* $n \geqslant \sqrt{M}$. *Posons* $N = E\left(\sqrt{M}\right) + 1$. *On a* $N^2 \geqslant M$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N$. *On a bien :* $n^2 \geqslant N^2 \geqslant M$ *et la suite tend donc vers* $+\infty$.
5. *Soit* $M \in \mathbb{R}$. *On cherche un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geqslant N$ *alors* $\sqrt{n} \geqslant M$ *ou de manière équivalente* $n \geqslant M^2$. *Posons* $N = E\left(M^2\right) + 1$. *On a* $\sqrt{N} \geqslant M$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N$. *On a bien :* $\sqrt{n} \geqslant \sqrt{N} \geqslant M$ *et la suite tend donc vers* $+\infty$.
6. *Soit* $M \in \mathbb{R}$. *On cherche un rang* $N \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geqslant N$ *alors* $\ln n \geqslant M$ *ou de manière équivalente* $n \geqslant e^M$. *Posons* $N = E\left(e^M\right) + 1$. *On a* $\ln N \geqslant M$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N$. *On a bien :* $\ln n \geqslant \ln N \geqslant M$ *et la suite tend donc vers* $+\infty$.

Références