$AM + B$ et AM ont même polynôme caractéristique, Centrale MP 2012

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $AM + B$ ***et*** AM ***ont même polynôme caractéristique, Centrale MP 2012 Centrales MP***

1. *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ *ayant même polynôme caractéristique. Montrer que* $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(B^2)$.
2. *Soient* $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$*. Montrer l'équivalence entre :*
   (a) $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $AM + B$ *et* AM *ont même polynôme caractéristique ;*
   (b) B *est nilpotente et* $BA = 0$.

Solution :

1. *Trigonaliser.*
2. ***(a)⇒(b)*** *:* B *a même polynôme caractéristique que la matrice nulle,* $(-X)^n$*, donc* $(-B)^n = 0$*. De plus, pour* M *quelconque,* $\operatorname{tr}((AM+B)^2) = \operatorname{tr}((AM)^2)$*, d'où* $0 = \operatorname{tr}(AMB + BAM) = 2\operatorname{tr}(BAM)$*. Ceci entraîne classiquement* $BA = 0$*.* ***(b)⇒(a)*** *: pour* $\lambda \neq 0$*, la matrice* $B - \lambda I$ *est inversible et on a pour* $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\det(AM + B - \lambda I) &= \det(B - \lambda I)\det((B - \lambda I)^{-1}AM + I) \\ &= (-\lambda)^n \det((B - \lambda I)^{-1}AM + I) \\ &= \det(-\lambda(B - \lambda I)^{-1}AM - \lambda I).\end{aligned}$$

De plus, $(B - \lambda I)A = -\lambda A$*, donc* $A = -\lambda(B - \lambda I)^{-1}A$ *et il vient* $\det(AM + B - \lambda I) = \det(AM - \lambda I)$ *pour tout* $\lambda \neq 0$*, donc aussi pour* $\lambda = 0$ *par caractère polynomial en* λ *des deux membres.*

Références