Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$2\arctan(\operatorname{th} x) = \arctan(\operatorname{sh} 2x)$$

Solution : *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\arctan(\operatorname{th} x) - \arctan(\operatorname{sh}(2x)) \end{array} \right.$. *On a* $D_f = \mathbb{R}$ *et*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{2}{1+\operatorname{th}^2 x}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2(2x)}(2\operatorname{ch}(2x)) \\ &= \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{2}{\operatorname{ch}^2(2x)} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent f *est constante sur* $\mathbb{R}$ *et puisque* $f(0) = 0$, *on a l'égalité voulue.*

En passant par la trigonométrie, soit $x \in \mathbb{R}$, $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ *tel que* $\operatorname{th} x = \tan\theta$. *Alors* $\arctan(\operatorname{sh}(2x)) = \arctan(2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)$. *Or* $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \dfrac{\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th}^2 x}$, *donc* $\operatorname{sh} 2x = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2(\theta)} = \tan(2\theta)$ *et puisque* $2\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *on obtient l'égalité souhaitée.*

Références