Polynômes, Centrale 2013

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Polynômes, Centrale 2013 Centrales***

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon R et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1. *Soit $0 \leq r < R$. Calculer en fonction de a_n, r et n l'intégrale $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta$.*
2.
   (a) *On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'alors f est constante.*
   (b) *On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme.*
3.
   (a) *On suppose que les a_n sont réels. Montrer que $\sum a_n^2 r^{2n}$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de f.*
   (b) *On suppose que $R \geq 1$, que pour tout n, $a_n \in \mathbb{Z}$ et que f est bornée sur le disque unité ouvert. Montrer que f est un polynôme.*

Solution :

1. *$\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^n e^{i(k-n)\theta}\, d\theta$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $|a_k r^n e^{i(k-n)\theta}| \leq |a_n| r^n$ qui est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions (de la variable θ) converge donc normalement sur $[0, 2\pi]$. On a donc $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\, d\theta = 2\pi a_n r^n$.*
2. (a) *On a, pour tout n, $2\pi |a_n| r^n \leq \int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq 2\pi \|f\|_\infty$. On divise par r^n et on fait tendre r vers l'infini. Il vient $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ donc f est constante.*
   (b) *On pose $P(z) = \sum_{k=0}^{d} b_k z^k$. On a, pour tous r et n, $|a_n| r^n \leq \sum_{k=0}^{d} |b_k| r^k$. Pour $n \geq d+1$ on divise par r^n et on fait tendre r vers $+\infty$. Il vient $a_n = 0$ et f est un polynôme.*
3. (a) *$\int_{\theta=0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{n,p\in\mathbb{N}} a_n \overline{a_p} r^{n+p} e^{i(n-p)\theta}\, d\theta = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n}$.*
   (b) *Soit M tel que, pour tout $|z| < 1$, $|f(z)| \leq M$.*
   Pour tout n, pour tout $r < 1$ on a $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 r^{2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 r^{2k} \leq M^2$. On peut faire tendre r vers 1 et en déduire que, pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq M^2$. On en déduit que la série $\sum a_k^2$ converge. En particulier la suite a_k converge vers 0. Or c'est une suite d'entiers donc elle est nulle à partir d'un certain rang, ce qui montre que f est un polynôme.

Références