X MP* 2001

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

19 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ **X MP* 2001 Polytechnique MP**

Soit D le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre 0 et rayon 1.

1. *Soit $\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 1$ et $r \in]0,1[$. Montrer que*
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$
2. *Soit E l'ensemble des fonctions de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ continues et dont la restriction à D est somme d'une série entière. Montrer que $f \mapsto \|f\| = \sup\{|f(z)|,\ z \in \overline{D}\}$ définit une norme sur E et que pour cette norme E est complet.*
3. *Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes est dense dans E.*

Solution :

1. *Complétude : soit (f_k) une suite d'éléments de E de Cauchy, $f_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} z^n$. On a à k et n fixés, par convergence dominée :*
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi r^n}\int_{\theta=0}^{2\pi} f_k(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = a_{n,k}.$$
La suite (f_k) converge uniformément sur $\overline{D}$ vers une fonction $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continue. On note :
$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}.$$
La suite (a_n) est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Pour $z \in D$ fixé on a alors :
$$f_k(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k}z^n = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_k(e^{i\theta})e^{-in\theta}z^n\Big)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{f_k(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta$$
$$\to_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}z^n\Big)\,d\theta = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$
ce qui prouve que $\varphi \in E$. Enfin on a $\|f_k - \varphi\| \to_{k\to\infty} 0$ par convergence uniforme, d'où $\varphi = \lim_{k\to\infty} f_k$ dans E.

2. *Soit* $f \in E$ *et* $f_n(z) = f\left(\frac{nz}{n+1}\right)$. *Comme* f *est uniformément continue,* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $\overline{D}$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* n *tel que* $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. *Comme* f_n *est développable en série entière avec un rayon au moins égal à* $1+\frac{1}{n}$, *son développement converge uniformément vers* f_n *sur* $\overline{D}$ *donc il existe* $P \in \mathbb{C}[X]$ *tel que* $\|f_n - P\|_\infty \leq \varepsilon$.

Références