Ulm MP* 2000

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

5 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Ulm MP* 2000 MP***

Soit $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$, $p_1, \dots, p_p \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^p p_i = 1$, et $\omega \in \mathbb{R}$.
Pour $n > p$ on pose $z_n = e^{i\omega} \sum_{j=1}^p z_{n-j} p_j$. Étudier la suite (z_n).

Solution : *On pose, sous réserve de convergence, $f(t) = \sum_{n=1}^\infty z_n t^n$. Alors :*

$$f(t) = \sum_{n=1}^p z_n t^n + \sum_{j=1}^p e^{i\omega} p_j \sum_{n=p+1}^\infty z_{n-j} t^n = \sum_{n=1}^p z_n t^n + \sum_{j=1}^p e^{i\omega} p_j t^j \Big(f(t) - \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n \Big)$$

soit :

$$\Big(1 - \sum_{j=1}^p e^{i\omega} p_j t^j \Big) f(t) = P(t) f(t) = \sum_{n=1}^p z_n t^n - \sum_{j=1}^p e^{i\omega} p_j t^j \sum_{n=1}^{p-j} z_n t^n = Q(t),$$

donc $f(t) = Q(t)/P(t)$. Réciproquement, soit $Q(t)/P(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n t^n$: en remontant les calculs précédents on voit que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (z_n) avec les mêmes premiers termes d'où $z_n = a_n$ pour tout n. Si $|t| < 1$ alors $\left| \sum_{j=1}^p e^{i\omega} p_j t^j \right| < 1$ donc P n'a pas de racine dans le disque unité ouvert. Si P n'a pas non plus de racine sur le cercle unité alors le développement en série entière de $Q(t)/P(t)$ a un rayon > 1 et $z_n \to_{n\to\infty} 0$. Si P admet des racines dans $\mathbb{U}$ on peut déja dire que la suite (z_n) est bornée par $\max(|z_1|, \dots, |z_p|)$ puis … ?

Références