Anneau des séries entières

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Anneau des séries entières***

Soit A l'ensemble des suites (a_n) de complexes telles que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon non nul. On munit A de l'addition terme à terme et du produit de Cauchy noté $*$.

1. *Vérifier que A est un anneau intègre. Quels sont les éléments de A inversibles ?*
2. *Soit $I_k = \{a = (a_n) \in A \text{ tq } a_0 = \cdots = a_k = 0\}$. Montrer que les idéaux de A sont $\{0\}$, A et les I_k, $k \in \mathbb{N}$.*
3. *Soit $f(x) = 2 - \sqrt{\dfrac{1-2x}{1-x}}$. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ alors la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $2u_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k u_{n+1-k}$.*
4. *Soit $a = (a_n) \in A$ avec $a_0 = 1$ et $|a_n| \leq 1$ pour tout n. Montrer qu'il existe une unique suite $b = (b_n) \in A$ telle que $b_0 = 1$ et $b * b = a$. Pour prouver que le rayon de convergence de b est non nul on établira par récurrence que $|b_n| \leq u_n$.*
5. *Pour $a \in A$ quelconque, étudier l'équation $b * b = a$ d'inconnue $b \in A$.*

Références