CCP 2015

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

19 juin 2024

Exercice 0.1 ★★ ***CCP 2015 CCP***

On considère la série de fonctions $\sum(-1)^n \ln(n)x^n$.

1. *Donner le rayon de convergence de cette série entière.*
2. *On note* S *sa somme. Montrer que, pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \frac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})x^{n+1}.$$

3. *En déduire que* S *a une limite en* 1^- *et la calculer.*

Solution :

1. *Pour tout* $n \geq 3$, $1 \leq \ln n \leq n$. *On en déduit que le rayon de convergence vaut 1.*
2. *Pour tout* $x \in]-1,1[$, $(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n\, x^{n+1}$
Or $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(n+1)\, x^{n+1}$, *donc* $(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\ln n - \ln(n+1))x^{n+1}$, *donc, pour tout* $x \in]-1,1[$, $S(x) = \frac{1}{1+x}(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})x^{n+1})$.
3. *Pour tout* $x \in [0,1]$, $\sum(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})x^{n+1}$ *vérifie le critère des séries alternées et donc, pour tout* $x \in [0,1]$, *pour tout* $n \geq 1$, $|R_n(x)| \leq \ln(1+\frac{1}{n})x^n \leq \frac{1}{n}$, *ce qui montre la convergence uniforme sur* $[0,1]$ *de la série entière. On peut donc en déduire que* S *a une limite en* 1^- *et que cette limite vaut* $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n})$.

Références