Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrez que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \arctan(\operatorname{sh} x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie.

Solution : *Considérons la fonction* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ *et* $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = 0$$

Comme $f(0) = 0$, *on trouve que* $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 0$.
Par la trigonométrie : soit un réel $x \geqslant 0$. *Comme* $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \in]0, 1[$, *il existe* $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ *tel que*

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \cos\theta$$

Alors

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} = \tan\theta$$

et alors

$$\arctan(\operatorname{sh} x) = \arctan(\tan\theta) = \theta$$

Et d'autre part, on a bien

$$\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right) = \arccos(\cos\theta) = \theta(\theta \in [0, \pi])$$

Références