Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Ens Ulm-Lyon-Cachan MP* 2003 MP***

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{inx}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Donner une CNS sur α pour que f soit développable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$.

Solution : *Il y a dérivation terme à terme facilement et indéfiniment.*

DSE au voisinage de 0 : on envisage de permuter les $\sum$ dans : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} \dfrac{(inx)^p}{p!}$, ce qui est légitime si la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{n|x|}$ converge. On en déduit qu'une condition suffisante pour que f soit DSE au voisinage de 0 est $\alpha \geq 1$ (avec convergence si $x \in]-1,1[$ pour $\alpha = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha > 1$). Cas $\alpha < 1$: $|f^{(k)}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^\alpha} n^k \geq e^{-N^\alpha} N^k$ avec $N = \lfloor k^{1/\alpha} \rfloor$ donc pour $r > 0$ fixé et k tendant vers l'infini on a $\ln\Big(\Big|\dfrac{f^{(k)}(0) r^k}{k!}\Big|\Big) \sim \Big(\dfrac{1}{\alpha} - 1\Big) k \ln(k)$ et la série de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0) r^k}{k!}$ diverge grossièrement. DSE au voisinage de $a \neq 0$: même raisonnement en écrivant $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-n^\alpha} e^{ina} \dfrac{(in(x-a))^p}{p!}$. En conclusion, f est analytique sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha \geq 1$.

Références