Développements en série entière

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Développements en série entière***

Développer en série entière les fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x+x^2)$.
2. $(x-1)\ln(x^2-5x+6)$.
3. $x\ln(x+\sqrt{x^2+1}\,)$.
4. $\dfrac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$.
5. $\dfrac{1}{1+x-2x^3}$.
6. $\dfrac{1-x}{(1+2x-x^2)^2}$.
7. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
8. $\arctan(x+1)$.
9. $\arctan(x+\sqrt{3}\,)$.
10. $\int_{t=0}^{x} \dfrac{\ln(t^2-5t/2+1)}{t}\,dt$.
11. $\left(\dfrac{(1+x)\sin x}{x}\right)^2$.
12. $\int_{t=x}^{2x} e^{-t^2}\,dt$.
13. $e^{-2x^2}\int_{t=0}^{x} e^{2t^2}\,dt$.
14. $\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.
15. $\sin(\frac{1}{3}\arcsin x)$.

Solution :

1. $= \ln(1-x^3)-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}+\dfrac{x^{3n+2}}{3n+2}-2\dfrac{x^{3n+3}}{3n+3}\right)$.

2. *Factoriser :* $-\ln 6 + (\frac{5}{6} + \ln 6)x - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2^n} + \dfrac{2n+1}{3^n}\right) \dfrac{x^n}{n(n-1)}$.

3. *Dériver le ln :* $\sum_{n=1}^{\infty} -1/\binom{n-1}{2} \dfrac{x^{2n}}{2n-1}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{2n+5+3(-1)^n}{4} x^n$.

5. $\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 + 2\sqrt{2}^{\,n} (2\cos(3n\pi/4) - \sin(3n\pi/4))\Big) x^n$.

6. *Intégrer :* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{4\sqrt{2}} \Big((-\sqrt{2}-1)^{n+2} - (\sqrt{2}-1)^{n+2}\Big) x^n$.

7. $= \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n (x^{2n} - x^{2n+1})$.

8. *Dériver :* $\dfrac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi/4)}{n\sqrt{2}^{\,n}} (-1)^n x^n$.

9. *Dériver :* $\dfrac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sin(n\pi/6)}{n 2^n} x^n$.

10. *Dériver, factoriser :* $\sum_{n=1}^{\infty} -\dfrac{2^n + 2^{-n}}{n^2} x^n$.

11. *Linéariser :* $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} 4^n}{(2n)!} \Big(x^{2n-1} + \dfrac{(2n^2+3n-1)}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n}\Big)$.

12. *Dériver :* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2^{2n+1}-1)}{n!\,(2n+1)} x^{2n+1}$.

13. $y' = -4xy + 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{8^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

14. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^n$.

15. $(1-x^2)y'' - xy' + \dfrac{y}{9} = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n \binom{3n}{n}}{(2n+1)3^{3n+1}} x^{2n+1}$.

Références