

Calculs de rayons

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Calculs de rayons

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

1. $a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} l \neq 0$.
2. (a_n) est périodique non nulle.
3. $a_n = \sum_{d|n} d^2$.
4. $a_n = n^n/n!$.
5. $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$, $0 < a < b$.
6. $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
7. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
8. $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
9. $a_n = \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{n!}$.
10. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
11. $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
12. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,
 $a_0 = a_1 = 1$.
13. $a_n = \binom{kn}{n}$.
14. $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
15. $a_n = \int_{t=0}^1 (1+t^2)^n dt$.
16. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
17. $a_n = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Solution :

1. $R = 1$.

2. $R = 1$.
3. $R = 1$.
4. $R = \frac{1}{e}$.
5. $R = 1/\sqrt{b}$.
6. $R = 1$.
7. $R = 1$.
8. $R = 1$.
9. $R = \frac{1}{3}$.
10. $R = 1$.
11. $R = 1$.
12. $R = \sqrt{2} - 1$.
13. $R = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.
14. $R = 0$.
15. $R = \frac{1}{2}, 2t \leq 1 + t^2 \leq 2$.
16. $R = 1, a_n \sim (\ln n)/n^2$.
17. $R = 1$.

Références