Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Simplifier, quand là où elles sont définies, les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$
2. $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$
3. $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$
4. $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$
5. $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$
6. $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x)$

Solution :

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* ch *est strictement positive sur* $\mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$ *et :*

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh} x)} = \boxed{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ *:*

$$\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *En utilisant les formules d'additions,*

$$\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x) = 2\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = \boxed{2x\sqrt{1+x^2}}.$$

4. *Soit* $x \in [1, +\infty[$. *Comme* sh *est positive sur* $[1, +\infty[$, $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$ *et*

$$\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch} x) - 1} = \boxed{\sqrt{x^2-1}}.$$

5. *Soit* $x \in [1, +\infty[$.

$$\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)}{\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x)} = \boxed{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}.$$

6. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *De :* $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, *on déduit,* ch *étant positive sur* $\mathbb{R}$ *:* $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}$.

   Par suite :

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth} x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}.$$

Références