Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1er décembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudier

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$$

Solution : *$D_f = \mathbb{R}^\star$, f est impaire. On fait l'étude sur $[0,+\infty[$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2x^2+2-2\sqrt{x^2+1}} \times \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2(x^2+1)(\sqrt{x^2+1}-1)} \\
&= \frac{1}{2(x^2+1)} \\
&= \frac{1}{2}\arctan'(x)
\end{aligned}$$

Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x + C_1$$

En prenant la limite lorsque $x \to +\infty$, on trouve $C_1 = 0$. De même, on montre que $\forall x \in]-\infty, 0[$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x$$

On retrouve ce résultat par la trigonométrie en posant $x = \tan\theta$.

Références