

Étude de l'anneau \mathbb{Z}^2

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Étude de l'anneau \mathbb{Z}^2

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. On pose $A_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } x \equiv y \pmod{d}\}$ ($x = y$ pour $d = 0$). Montrer que A_d est un sous-anneau de \mathbb{Z}^2 .
2. Montrer que l'on obtient ainsi tous les sous-anneaux de \mathbb{Z}^2 .
3. Soit I un idéal de \mathbb{Z}^2 . On note : $I_1 = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } (x, 0) \in I\}$ et $I_2 = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tq } (0, y) \in I\}$. Montrer que I_1 et I_2 sont des idéaux de \mathbb{Z} , et que $I = I_1 \times I_2$.
4. En déduire que I est un idéal monogène.

Références