Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudier la fonction

$$f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solution : *On détermine* $D_f =]-1,1[$, *f est impaire et dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \times \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\exists C \in \mathbb{R}$, *tel que* $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = C$. *Comme* $f(0) = 0$, *on a montré que* $\forall x \in]-1,1[$,

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

On retrouve ce résultat par la trigonométrie. Soit $x \in]-1,1[$. *Alors* $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $x = \sin\theta$. *Alors*

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arctan \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \arctan\theta = \theta$$

Références