

Anneau de Boole

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Anneau de Boole

Soit E un ensemble fini et $A = \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que (A, Δ, \cap) est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
2. Soit I un idéal de A . Montrer que :
$$\begin{cases} \forall X \in I, \forall Y \subset X, \text{ on a } Y \in I \\ \forall X, Y \in I, \text{ on a } X \cup Y \in I. \end{cases}$$
3. En déduire que $I = \mathcal{P}(E')$ avec $E' \subset E$.
4. Étudier la réciproque.
5. Si E est infini, montrer que $I = \{\text{parties finies de } E\}$ est un idéal qui n'est pas de la forme $\mathcal{P}(E')$.

Références