Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudier la fonction

$$f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\arctan x$$

Solution :

1. *Puisque* $\arccos$ *est définie sur* $[-1,1]$*, il faut que* $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leqslant 1$*, ce qui est toujours vérifié car* $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $1-x^2 \leqslant 1+x^2$ *et* $1-x^2 \geqslant -(1+x^2)$*. Donc* $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$*. Il n'y a pas de parité.*
2. *Puisque* $\arccos$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et que* $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| = 1 \Longleftrightarrow x = 0$*,* f *est dérivable sur* $I_1 =]-\infty, 0[$ *et sur* $I_2 =]0,+\infty[$ *comme composée de fonctions dérivables. Et* $\forall x \in I_1 \cup I_2$ *:*

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{-2}{(1+x^2)^2}(2x) - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2sg(x)}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}$$

Par conséquent, puisque $f' = 0$ *sur* I_2*,* $\exists C_2 \in \mathbb{R}$*, tel que* $\forall x \in I_1$*,* $f(x) = C_2$ *et en faisant* $x \to +\infty$*,* $C_2 = 0$*. Sur* I_1*,* $f'(x) = -\dfrac{4}{1+x^2}$ *et donc* $\exists C_1 \in \mathbb{R}$*, tel que* $\forall x \in I_1$*,* $f(x) = 4\arctan x + C_1$*. En faisant* $x \to -\infty$*, on trouve que* $C_1 = 2\pi$*.*

3. *Montrons par la trigonométrie que*

$$\forall x \geqslant 0, \quad \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan x$$

Soit $x \geqslant 0$*. Il existe un unique* $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *tel que* $x = \tan\theta/2$*. Alors* $2\arctan x = \theta$ *et*

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arccos(\cos\theta) = \theta(\theta \in [0,\pi])$$

Références