Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie

Indication 0.0 : *On pourra poser* $x = \sin^2 u$

Solution : *Soit* $f(x) = \arcsin\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$. f *est bien définie sur* $[0,1]$ *car* $-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1$. *Elle est dérivable sur* $]0,1[$ *et*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} = 0$$

Cette fonction est donc constante sur l'intervalle $[0,1]$. *En faisant* $x = 0$, *on trouve que* $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

On retrouve ce résultat car on peut poser $x = \sin^2 u$ *lorsque* $x \in [0,1]$, *avec* $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. *Alors*

$$\arcsin(2x-1) = \arcsin(-\cos 2u) = -\arcsin(\cos 2u) = \arccos(\cos 2u) - \frac{\pi}{2} = 2u - \frac{\pi}{2}$$

et $\arcsin\sqrt{x} = \arcsin\sin u = u$.

Références