

$$\sum \omega^{k^2}$$

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $\sum \omega^{k^2}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$. On demande de calculer $|Z|^2$. Pour cela

1. Écrire $|Z|^2$ comme une somme double.
2. Regrouper les termes diagonalement en tenant compte de la périodicité de la fonction $k \mapsto \omega^k$.
3. Terminer le calcul.

Solution :

1. Pour n impair, $|Z|^2 = n$. Pour n pair, $|Z|^2 = n(1 + (-1)^{n/2})$.

Références