

Racines de l'unité

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Racines de l'unité

Résoudre :

1. $(z+1)^n = (z-1)^n$.
2. $(z+1)^n = z^n = 1$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.
5. $\bar{z} = z^{n-1}$.
6. $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i \tan a}{1-i \tan a}$.
7. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.

Solution :

1. $z = -i \cotan \frac{k\pi}{n}$.
2. Si $6|n$ alors $z = j$ ou j^2 . Sinon il n'y a pas de solution.
3. $z = \exp \frac{(2k+1)i\pi}{5}$, $k = 0, 1, 3, 4$.
4. $z = -1$ ou $z = \exp \frac{2ik\pi}{n}$, $1 \leq k < n$.
5. $x = \tan \left(\frac{a + 2k\pi}{n} \right)$.
6. $z = \pm i$, $\pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

Références