

Pas de titre

François Capaces¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and Alain Soyeur³

¹, ,

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Étudiez la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2 \arctan x$$

Solution : La fonction f est définie pour $x \notin \{-1, +1\}$ donc $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Comme la fonction f est impaire, on fait l'étude sur les intervalles $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. Calculons sa dérivée :

$$\forall x \in I_1 \cup I_2, \quad f'(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

Par conséquent, $\exists C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I_1, f(x) = C_1$ et $\exists C_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I_2, f(x) = C_2$. En faisant $x = 0$ et $x \rightarrow +\infty$, on trouve que $C_1 = 0$ et $C_2 = -\pi$.

Montrons par la trigonométrie que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2 \arctan x$$

Soit $x \in]-1, 1[$. $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ tel que $x = \tan \theta$. Alors

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\tan 2\theta}{1-\tan^2 \theta} = \tan(2\theta)$$

Or $2\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\arctan \frac{2x}{1-x^2} = 2\theta = 2 \arctan x$$

Références