Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

17 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudiez la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan x$$

Solution : *La fonction f est définie pour $x \notin \{-1,+1\}$ donc $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. Comme la fonction f est impaire, on fait l'étude sur les intervalles $I_1 = [0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$. Calculons sa dérivée :*

$$\forall x \in I_1 \cup I_2, \quad f'(x) = \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

Par conséquent, $\exists C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I_1$, $f(x) = C_1$ et $\exists C_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I_2$, $f(x) = C_2$. En faisant $x = 0$ et $x \to +\infty$, on trouve que $C_1 = 0$ et $C_2 = -\pi$.
Montrons par la trigonométrie que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan x$$

Soit $x \in]-1,1[$. $\exists! \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $x = \tan\theta$. Alors

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\tan 2\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan(2\theta)$$

Or $2\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$\arctan\frac{2x}{1-x^2} = 2\theta = 2\arctan x$$

Références