

Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

9 décembre 2022

Exercice 0.1 Anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$

1. **soit** : $\exists a \geq 1 : H = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$,
soit : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2, (\alpha < \beta) \implies]\alpha, \beta[\cap H \neq \emptyset$.
(On pourra utiliser le logarithme.)

Dans toute cette partie, $\mathcal{A} = \{a + b\sqrt{7} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. On admet que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. (voir l'exercice ?? p. ??.)

- Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{A}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{7}$.
- Démontrer que \mathcal{A} est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
- Démontrer que l'ensemble $U(\mathcal{A})$ des éléments inversibles de \mathcal{A} est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) .

Pour $x = a + b\sqrt{7} \in \mathcal{A}$, on note \bar{x} le réel $a - b\sqrt{7}$ et on note $N(x) = x\bar{x} = a^2 - 7b^2$.

- Expliquer rapidement pourquoi \bar{x} et $N(x)$ sont bien définis.
- Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, N(xy) = N(x)N(y)$.
On admet que l'équation $N(x) = -1$ n'admet pas de solution dans \mathcal{A} . Voir à ce sujet l'exercice ?? p. ??.
- Démontrer que $\forall x \in \mathcal{A}, (x \in U(\mathcal{A}) \iff (N(x) = 1))$. Le cas échéant, que vaut l'inverse de x ?
 - Soit $a + b\sqrt{7} \in U(\mathcal{A})$. Démontrer que $(a \geq 0 \text{ et } b \geq 0) \iff (a + b\sqrt{7} \geq 1)$.
 - Démontrer que $U(\mathcal{A})$ n'est pas réduit à $\{-1, 1\}$.
 - Démontrer que l'intervalle $]1, 3\sqrt{7}[$ ne contient pas d'éléments de $U(\mathcal{A})$.
 - Démontrer qu'il existe un élément de u de $U(\mathcal{A}) \cap]1, +\infty[$ tel que

$$U(\mathcal{A}) = \{\varepsilon u^n; \varepsilon = \pm 1 \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Le nombre u évidemment (?) unique est appelé unité principale de \mathcal{A} .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, u^n = a_n + b_n\sqrt{7}$.

- Démontrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et strictement croissantes.

- En déduire la valeur de u .
- Donner dans l'ordre croissant des valeurs de x , les quatre plus petites solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de l'équation dite de Pell-Fermat :

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

On pose $\alpha_n = a_{2^n}$ et $\beta_n = b_{2^n}$.

- Établir des relations de récurrence entre les α_{n+1} et β_{n+1} d'une part et les α_n et β_n d'autre part.
- Démontrer que $\frac{a_n}{b_n}$ converge vers une limite finie λ que l'on déterminera.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_n = \left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} - \lambda \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{7}\beta_n^2}.$$

- Donner une majoration explicite de l'erreur ε_n en fonction de n .
(On pourra, faute de mieux, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geq 3^{2^n}$ et $\beta_n \geq 3^{2^n}$.)
- En déduire une approximation rationnelle de $\sqrt{7}$ à 10^{-20} près.
Voir aussi exercice ?? p. ??.

Solution :

- On considère l'image G de H par le logarithme. On vérifie que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
 - Supposons que G soit de la forme $m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{R}_+$. En posant $a = e^m$, on a bien $H = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$.
 - Si non G est dense dans \mathbb{R} . Soit $0 < \alpha < \beta$, on peut donc trouver un élément x de G dans $]\ln a, \ln b[$ et e^x appartient à la fois à H et à $]\alpha, \beta[$.
- Supposons $a + b\sqrt{7} = a' + b'\sqrt{7}$ soit $a - a' = (b' - b)\sqrt{7}$. On a $b' - b = 0$ sinon on aurait $\sqrt{7} = \frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible. On en déduit $a - a' = 0$ ce qu'il fallait démontrer.
 - \mathcal{A} est stable pour la soustraction : $a + b\sqrt{7} - (a' + b'\sqrt{7}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{7} \in \mathcal{A}$.
 - \mathcal{A} est stable pour la multiplication : $(a + b\sqrt{7})(a' + b'\sqrt{7}) = (aa' + 7bb') + (ab' + ba')\sqrt{7}$.
 - l'élément unité 1 de $(\mathbb{R}, +, \times)$ appartient bien à \mathcal{A} : $1 = 1 + 0\sqrt{7}$.
 Donc \mathcal{A} est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
 - On a $1 \in U(\mathcal{A})$. Si $x, y \in U(\mathcal{A})$, on a $y^{-1} \in U(\mathcal{A})$ et par suite $xy^{-1} \in U(\mathcal{A})$.
- Lorsqu'on écrit $x = a + b\sqrt{7}$, les entiers a et b sont uniques. Par suite \bar{x} et $N(x)$ sont définis.
 - Soit $(x, y) \in \mathcal{A}^2$. On pose $x = a + b\sqrt{7}$, $y = a' - b'\sqrt{7}$, on a $xy = (aa' + 7bb') + (ab' + ba')\sqrt{7}$, $\bar{xy} = (aa' + 7bb') - (ab' + ba')\sqrt{7}$. Ensuite $\bar{xy} = (aa' + 7(-b)(-b')) + (a(-b') - ba')\sqrt{7} = \bar{xy}$. Puis $N(xy) = xy\bar{xy} = xy\bar{xy} = N(x)N(y)$.
 - Si $N(x) = 1$, alors $x\bar{x} = 1$ et donc $\bar{x} \in U(\mathcal{A})$ est bien l'inverse de x dans \mathcal{A} .
Réciproquement, si x est inversible dans \mathcal{A} , il existe y dans \mathcal{A} tel que $xy = 1$. Donc $N(x)N(y) = N(1) = 1$. Donc $N(x)$ et $N(y)$ sont des entiers dont le produit vaut 1, ils sont donc égaux à 1 ou -1. Comme l'équation $N(x) = -1$ n'admet pas de solution, c'est que $N(x) = 1$. Ce qu'il fallait démontrer.

4. (a) En effet, en posant $x = a + b\sqrt{7}$, on a $\frac{1}{x} = a - b\sqrt{7}$, $-x = -a - b\sqrt{7}$ et $-\frac{1}{x} = -a + b\sqrt{7}$. Parmi ces quatre nombre, le plus grand appartient à $[1, +\infty[$, son inverse à $]0, 1]$, son opposé, à $] - \infty, -1]$ et l'inverse de son opposé à $[-1, 0[$. Comme le plus grand des quatre a ses deux coefficients positifs, la proposition en résulte.
- (b) On a $8^2 - 7 \times 3^2 = 1$, donc $8 + 3\sqrt{7} \in U(\mathcal{A})$.
- (c) Tous les éléments de $U(\mathcal{A})$ plus grands que 1 ont des coefficients a et b positifs. On regarde donc les valeurs de $b \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $a^2 - 7b^2 = 1$. Les solutions $b = 1$ ou $b = 2$ ne conviennent pas, donc on a $b \geq 3$. Comme $a \geq 0$, on en déduit que $a + b\sqrt{7} \geq 3\sqrt{7}$. C'est bien dire qu'il n'y a pas d'élément de $U(\mathcal{A})$ dans $]1, 3\sqrt{7}[$.
- (d) La question précédente montre que $U(\mathcal{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas dense, puisqu'il évite $]1, 3\sqrt{7}[$. Donc il est de la forme $\{u^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. En rajoutant les opposés, on obtient le résultat.
5. (a) Comme $u > 1$, on a $a_1 \geq 1$ et $b_1 \geq 1$. Comme $u^{n+1} = (a_1 + b_1\sqrt{7})(a_n + b_n\sqrt{7})$ on en déduit

$$a_{n+1} = a_n a_1 + 7b_n b_1 > a_n, \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n b_1 + b_n a_1 > b_n.$$

D'où le résultat.

- (b) L'image de la suite u^n est $U(\mathcal{A}) \cap [1, +\infty[$ tout entier, donc $u_1 = u$ est la plus petite valeur de $U(\mathcal{A}) \cap [1, +\infty[$, à savoir $8 + 3\sqrt{7}$.
- (c) D'après ce qui précède ce sont les (a_k, b_k) fournis par les u^k pour $k = 1, 2$ et 3 . Soit $(8, 3)$, $(127, 48)$, $(2034, 765)$, $(32257, 12192)$.
6. (a) On a $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\sqrt{7} = (\alpha_n + \beta_n\sqrt{7})^2$. On en déduit $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 7\beta_n^2$ et $\beta_{n+1} = 2\alpha_n\beta_n$.
- (b) Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 - 7\beta_n^2 = 1$, en divisant par β_n^2 on a

$$\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - 7 = \frac{1}{\beta_n^2}.$$

La suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, qui tend donc vers $+\infty$.

Donc $\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}$ tend vers 7 et par suite $\lambda = \sqrt{7}$.

- (c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_n = \left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} - \lambda \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{7}\beta_n^2}.$$

- (d) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 = 7\beta_n^2 + 1 > 7\beta_n^2$. Donc $\frac{\alpha_n}{\beta_n} + \sqrt{7} > 2\sqrt{7}$.

On en déduit $\left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} - \sqrt{7} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{7}} \frac{1}{\beta_n^2}$.

Pour $n = 1$, on a $\beta_1 = b_2 = \sqrt{48}^{2^1}$ et $\alpha_1 = a_2 = 127 \geq \sqrt{48}^{2^1}$. On montre par récurrence que pour $n \geq 1, \alpha_n \geq \sqrt{48}^{2^n}$ et $\beta_n \geq \sqrt{48}^{2^n}$. On a alors $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 7\beta_n^2 \geq \sqrt{48}^{2^{n+1}} + 7\sqrt{48}^{2^{n+1}} \geq \sqrt{48}^{2^{n+1}}$ et $\beta_{n+1} = 2\alpha_n\beta_n \geq 2\sqrt{48}^{2^n} \sqrt{48}^{2^n} \geq \sqrt{48}^{2^{n+1}}$, ce qu'il fallait vérifier. Finalement, pour $n \geq 1$,

$$\left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} - \sqrt{7} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{7}} \frac{1}{48^{2^{n+1}}}$$

(e) On cherche à avoir $2\sqrt{7}48^{2^n} \geq 10^{20}$. En prenant les logarithmes décimaux, cela revient à $\log_{10}(2\sqrt{7}) + 2^n \log_{10}(48) \geq 20$. On calcule $\frac{20 - \log_{10}(2\sqrt{7})}{\log_{10}(48)} < 11,5$, donc il suffit d'avoir $2^n > 11,5$, par exemple $n = 4$.

n	α_n	β_n
0	8	3
1	127	48
2	32257	12192
3	2081028097	786554688
4	8661355881006882817	3273684811110137472

Donc $\sqrt{7} = \frac{8661355881006882817}{3273684811110137472}$ à 10^{-20} près.

Références