Anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{7}\right]$

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2023

Exercice 0.1 ***Anneau*** $\mathbb{Z}\left[\sqrt{7}\right.$

1. ***soit :*** $\exists a \geqslant 1 : H = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$**,**
soit : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$**,** $(\alpha < \beta) \Longrightarrow (]\alpha,\beta[\cap H \neq \varnothing)$**.**
(*On pourra utiliser le logarithme.*)

Dans toute cette partie, $\mathcal{A} = \left\{a + b\sqrt{7} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. On admet que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. (voir l'exercice **??** p. **??**.)

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathcal{A}$, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{7}$.
2. Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3. Démontrer que l'ensemble $U(\mathcal{A})$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Pour $x = a + b\sqrt{7} \in \mathcal{A}$, on note $\overline{x}$ le réel $a - b\sqrt{7}$ et on note $N(x) = x\overline{x} = a^2 - 7b^2$.

1. Expliquer rapidement pourquoi $\overline{x}$ et $N(x)$ sont bien définis.
2. Démontrer que $\forall(x,y) \in \mathcal{A}^2$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
   On admet que l'équation $N(x) = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathcal{A}$. Voir à ce sujet l'exercice **??** p. **??**.
3. Démontrer que $\forall x \in \mathcal{A}$, $(x \in U(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow (N(x) = 1))$. Le cas échéant, que vaut l'inverse de x ?

1. Soit $a + b\sqrt{7} \in U(\mathcal{A})$. Démontrer que $(a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0) \Longleftrightarrow (a + b\sqrt{7} \geqslant 1)$.
2. Démontrer que $U(\mathcal{A})$ n'est pas réduit à $\{-1, 1\}$.
3. Démontrer que l'intervalle $\left]1, 3\sqrt{7}\right[$ ne contient pas d'éléments de $U(\mathcal{A})$.
4. Démontrer qu'il existe un élément de u de $U(\mathcal{A}) \cap]1, +\infty[$ tel que
$$U(\mathcal{A}) = \{\varepsilon u^n ; \varepsilon = \pm 1 \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}.$$
   Le nombre u évidemment (?) unique est appelé unité principale de $\mathcal{A}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n = a_n + b_n\sqrt{7}$.

1. Démontrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives et strictement croissantes.

2. En déduire la valeur de u.
3. Donner dans l'ordre croissant des valeurs de x, les quatre plus petites solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de l'équation dite de Pell-Fermat :
$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

On pose $\alpha_n = a_{2^n}$ et $\beta_n = b_{2^n}$.

1. Établir des relations de récurrence entre les α_{n+1} et β_{n+1} d'une part et les α_n et β_n d'autre part.
2. Démontrer que $\dfrac{a_n}{b_n}$ converge vers une limite finie λ que l'on déterminera.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\varepsilon_n = \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \lambda\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}\,\beta_n^2}.$$
4. Donner une majoration explicite de l'erreur ε_n en fonction de n.
(On pourra, faute de mieux, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \geqslant 3^{2^n}$ et $\beta_n \geqslant 3^{2^n}$.)
5. En déduire une approximation rationnelle de $\sqrt{7}$ à 10^{-20} près.
Voir aussi exercice **??** p. **??**.

Solution :

1. On considère l'image G de H par le logarithme. On vérifie que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- *Supposons que G soit de la forme $m\mathbb{Z}, m \in \mathbb{R}_+$. En posant $a = e^m$, on a bien $H = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$.*
- *Sinon G est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $0 < \alpha < \beta$, on peut donc trouver un élément x de G dans $]\ln a, \ln b[$ et e^x appartient à la fois à H et à $]\alpha, \beta[$.*

2. (a) Supposons $a + b\sqrt{7} = a' + b'\sqrt{7}$ soit $a - a' = (b' - b)\sqrt{7}$. On a $b' - b = 0$ sinon on aurait $\sqrt{7} = \dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible. On en déduit $a - a' = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

(b)
- *$\mathcal{A}$ est stable pour la soustraction : $a + b\sqrt{7} - (a' + b'\sqrt{7}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{7} \in \mathcal{A}$.*
- *$\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication : $(a+b\sqrt{7}) \times (a'+b'\sqrt{7}) = (aa'+7bb') + (ab'+ba')\sqrt{7}$.*
- *l'élément unité 1 de $(\mathbb{R}, +, \times)$ appartient bien à $\mathcal{A}$: $1 = 1 + 0\sqrt{7}$.*

Donc $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

(c) On a $1 \in U(\mathcal{A})$. Si $x, y \in U(\mathcal{A})$, on a $y^{-1} \in U(\mathcal{A})$ et par suite $xy^{-1} \in U(\mathcal{A})$.

3. (a) Lorsqu'on écrit $x = a + b\sqrt{7}$, les entiers a et b sont uniques. Par suite $\overline{x}$ et $N(x)$ sont définis.

(b) Soit $(x, y) \in \mathcal{A}^2$. On pose $x = a + b\sqrt{7}$, $y = a' - b'\sqrt{7}$, on a $xy = (aa' + 7bb') + (ab' + ba')\sqrt{7}$, $\overline{xy} = (aa' + 7bb') - (ab' + ba')\sqrt{7}$. Ensuite $\overline{xy} = (aa' + 7(-b)(-b')) + (a(-b') - ba')\sqrt{7} = \overline{xy}$. Puis $N(xy) = xy\overline{xy} = xy\overline{xy} = N(x)N(y)$.

(c) Si $N(x) = 1$, alors $x\overline{x} = 1$ et donc $\overline{x} \in U(\mathcal{A}$ est bien l'inverse de x dans $\mathcal{A}$.

Réciproquement, si x est inversible dans $\mathcal{A}$, il existe y dans $\mathcal{A}$ tel que $xy = 1$. Donc $N(x)N(y) = N(1) = 1$. Donc $N(x)$ et $N(y)$ sont des entiers dont le produit vaut 1, ils sont donc égaux à 1 ou -1. Comme l'équation $N(x) = -1$ n'admet pas de solution, c'est que $N(x) = 1$. Ce qu'il fallait démontrer.

4. (a) En effet, en posant $x = a + b\sqrt{7}$, on a $\dfrac{1}{x} = a - b\sqrt{7}$, $-x = -a - b\sqrt{7}$ et $-\dfrac{1}{x} = -a + b\sqrt{7}$. Parmi ces quatre nombre, le plus grand appartient à $[1, +\infty[$, son inverse à $]0, 1]$, son opposé, à $]-\infty, -1]$ et l'inverse de son opposé à $[-1, 0[$. Comme le plus grand des quatre a ses deux coefficients positifs, la proposition en résulte.

(b) On a $8^2 - 7 \times 3^2 = 1$, donc $8 + 3\sqrt{7} \in U(\mathcal{A})$.

(c) Tous les éléments de $U(\mathcal{A})$ plus grands que 1 ont des coefficients a et b positifs. On regarde donc les valeurs de $b \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $a^2 - 7b^2 = 1$. Les solutions $b = 1$ ou $b = 2$ ne conviennent pas, donc on a $b \geqslant 3$. Comme $a \geqslant 0$, on en déduit que $a + b\sqrt{7} \geqslant 3\sqrt{7}$. C'est bien dire qu'il n'y a pas d'élément de $U(\mathcal{A})$ dans $\left]1, 3\sqrt{7}\right[$.

(d) La question précédente montre que $U(\mathcal{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$ n'est pas dense, puisqu'il évite $\left]1, 3\sqrt{7}\right[$. Donc il est de la forme $\{u^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. En rajoutant les opposés, on obtient le résultat.

5. (a) Comme $u > 1$, on a $a_1 \geqslant 1$ et $b_1 \geqslant 1$. Comme $u^{n+1} = (a_1 + b_1\sqrt{7})(a_n + b_n\sqrt{7})$ on en déduit

$$a_{n+1} = a_n a_1 + 7 b_n b_1 > a_n, \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = a_n b_1 + b_n a_1 > b_n.$$

D'où le résultat.

(b) L'image de la suite u^n est $U(\mathcal{A}) \cap [1, +\infty[$ tout entier, donc $u_1 = u$ est la plus petite valeur de $U(\mathcal{A}) \cap]1, +\infty[$, à savoir $8 + 3\sqrt{7}$.

(c) D'après ce qui précède ce sont les (a_k, b_k) fournis par les u^k pour $k = 1, 2$ et 3. Soit $(8, 3)$, $(127, 48)$, $(2034, 765)$, $(32257, 12192)$.

6. (a) On a $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\sqrt{7} = \left(\alpha_n + \beta_n\sqrt{7}\right)^2$. On en déduit $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 7\beta_n^2$ et $\beta_{n+1} = 2\alpha_n\beta_n$.

(b) Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 - 7\beta_n^2 = 1$, en divisant par β_n^2 on a

$$\frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} - 7 = \frac{1}{\beta_n^2}.$$

La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, qui tend donc vers $+\infty$. Donc $\dfrac{\alpha_n^2}{\beta_n^2}$ tend vers 7 et par suite $\lambda = \sqrt{7}$.

(c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_n = \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \lambda\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}\,\beta_n^2}.$$

(d) On a $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n^2 = 7\beta_n^2 + 1 > 7\beta_n^2$. Donc $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} + \sqrt{7} > 2\sqrt{7}$.

On en déduit $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} - \sqrt{7}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{7}}\,\dfrac{1}{\beta_n^2}$.

Pour $n = 1$, on a $\beta_1 = b_2 = \sqrt{48}^{2^1}$ et $\alpha_1 = a_2 = 127 \geqslant \sqrt{48}^{2^1}$. On montre par récurrence que pour $n \geqslant 1, \alpha_n \geqslant \sqrt{48}^{2^n}$ et $\beta_n \geqslant \sqrt{48}^{2^n}$. On a alors $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 7\beta_n^2 \geqslant \sqrt{48}^{2^{n+1}} + 7\sqrt{48}^{2^{n+1}} \geqslant \sqrt{48}^{2^{n+1}}$ et $\beta_{n+1} = 2\alpha_n\beta_n \geqslant 2\sqrt{48}^{2^n}\sqrt{48}^{2^n} \geqslant \sqrt{48}^{2^{n+1}}$, ce qu'il fallait vérifier.
Finalement, pour $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \sqrt{7}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}}\,\frac{1}{48^{2^{n+1}}}$$

(e) *On cherche à avoir* $2\sqrt{7}48^{2^n} \geqslant 10^{20}$. *En prenant les logarithmes décimaux, cela revient à* $\log_{10}(2\sqrt{7}) + 2^n \log_{10}(48) \geqslant 20$. *On calcule* $\dfrac{20 - \log_{10}(2\sqrt{7})}{\log_{10}(48)} < 11,5$, *donc il suffit d'avoir* $2^n > 11,5$, *par exemple* $n = 4$.

n	α_n	β_n
0	8	3
1	127	48
2	32257	12192
3	2081028097	786554688
4	8661355881006882817	3273684811110137472

Donc $\sqrt{7} = \dfrac{8661355881006882817}{327368481111013747}$ à 10^{-20} *près.*

Références