Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

9 décembre 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ un morphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ vers lui-même.

1. *Montrer que l'application f est croissante ;*
2. *Calculer $f(r)$ lorsque $r \in \mathbb{Q}$;*
3. *Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de rationnels (r_n) croissante et une suite de rationnels (q_n) décroissante qui convergent vers x ;*
4. *En déduire tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{R}$ vers lui-même.*

Solution :

1. *Soit $z \geqslant 0$. Écrivons $f(z) = f(\sqrt{z}\sqrt{z}) = f(\sqrt{z})^2 \geqslant 0$. Soit alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leqslant y$. Calculons $f(y-x) = f(y) - f(x) \geqslant 0$. Donc l'application f est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *En utilisant que f est un morphisme de groupe (classique) et que $f(1) = 1$, on montre que $\forall r \in \mathbb{R},\ f(r) = r$.*
3. *Utilisons la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists (r, q) \in \mathbb{Q}^2\ :\ x - \varepsilon < r < x < q < x + \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = 1$, il existe $(r_1, q_1) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $x - 1 \leqslant r_1 < x < q_1 \leqslant x + 1$. Supposons construits les rationnels $r_1, \dots, r_n$ et $q_1, \dots, q_n$. Posons $\varepsilon = \min\left(\dfrac{1}{n+1}, q_n - r_n\right) > 0$. Il existe alors $(r_{n+1}, q_{n+1}) \in \mathbb{Q}^2$ tels que $r_n < r_{n+1} < x < q_{n+1} < q_n$ avec en plus $x - \frac{1}{n+1} \leqslant r_{n+1} < q_{n+1} \leqslant x + \frac{1}{n}$. On construit ainsi par récurrence deux suites de rationnels, avec la suite (r_n) qui est croissante et la suite (q_n) décroissante. D'après le théorème des gendarmes, puisque $\forall n \geqslant 1$,

$$x - \frac{1}{n} \leqslant r_n \leqslant x \leqslant q_n \leqslant x + \frac{1}{n}$$

ces deux suites convergent vers x.

4. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Puisque la fonction f est croissante, on a*

$$f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(q_n)$$

or comme $\forall n \geqslant 1$, $f(r_n) = r_n$ et $f(q_n) = q_n$, et que les deux suites convergent vers x, il vient que $f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $f(q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et par passage à la limite dans les inégalités, on trouve que $f(x) = x$. Par conséquent, $f = \mathrm{id}$ et réciproquement, id est bien un morphisme d'anneau.

Références