

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad (xy)^2 = x^2y^2$$

1. Montrer que $\forall (x, y) \in A^2, xyx = x^2y = yx^2$.
2. En déduire que A est un anneau commutatif.

Solution :

1. Soit $(x, y) \in A^2$. En utilisant la propriété de l'énoncé avec x et $(1 + y)$, on trouve que

$$\begin{aligned} [x(1 + y)]^2 &= x^2(1 + y)^2 \\ \Rightarrow x^2 + x^2y + xyx + (xy)^2 &= x^2 + 2x^2y + x^2y^2 \\ \Rightarrow xyx &= x^2y \end{aligned}$$

(car $(xy)^2 = x^2y^2$). De même, en utilisant la propriété avec x et $(1 + y)$ on démontre que $xyx = x^2y$.

2. Soit $(x, y) \in A^2$. En utilisant la propriété du 1. avec $(1 + x)$ et y , on trouve que

$$\begin{aligned} (1 + x)^2y &= y(1 + x)^2 \\ \Rightarrow y + 2xy + x^2y &= y + 2yx + yx^2 \\ \Rightarrow 2xy &= 2yx \end{aligned}$$

Ce qui ne suffit pas à conclure que $xy = yx$!

Mais avec la même idée, développons $(1 + x)^3y$. Comme $x^3y = x(x^2y) = x(yx^2) = (xyx)x = (yx^2)x = yx^3$,

$$\begin{aligned} (1 + x)^3y &= y(1 + x)^3 \\ \Rightarrow y + 3xy + 3x^2y + x^3y &= y + 3yx + 3yx^2 + yx^3 \\ \Rightarrow 3xy &= 3yx \end{aligned}$$

Donc $3xy - 2xy = 3yx - 2yx$ et par conséquent, $xy = yx$.

Références