Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

9 décembre 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que

$$\forall (x,y)\in A^2,\quad (xy)^2 = x^2y^2$$

1. *Montrer que $\forall (x,y)\in A^2$, $xyx = x^2y = yx^2$.*
2. *En déduire que A est un anneau commutatif .*

Solution :

1. *Soit $(x,y)\in A^2$. En utilisant la propriété de l'énoncé avec x et $(1+y)$, on trouve que*

$$\begin{aligned} &\left[x(1+y)\right]^2 = x^2(1+y)^2 \\ \Rightarrow\ & x^2 + x^2y + xyx + (xy)^2 = x^2 + 2x^2y + x^2y^2 \\ \Rightarrow\ & xyx = x^2y \end{aligned}$$

(car $(xy)^2 = x^2y^2$). De même, en utilisant la propriété avec x et $(1+y)$ on démontre que $xyx = x^2y$.

2. *Soit $(x,y)\in A^2$. En utilisant la propriété du 1. avec $(1+x)$ et y, on trouve que*

$$\begin{aligned} &(1+x)^2y = y(1+x)^2 \\ \Rightarrow\ & y + 2xy + x^2y = y + 2yx + yx^2 \\ \Rightarrow\ & 2xy = 2yx \end{aligned}$$

Ce qui ne suffit pas à conclure que $xy = yx$!
Mais avec la même idée, développons $(1+x)^3y$. Comme $x^3y = x(x^2y) = x(yx^2) = (xyx)x = (yx^2)x = yx^3$,

$$\begin{aligned} &(1+x)^3y = y(1+x)^3 \\ \Rightarrow\ & y + 3xy + 3x^2y + x^3y = y + 3yx + 3yx^2 + yx^3 \\ \Rightarrow\ & 3xy = 3yx \end{aligned}$$

Donc $3xy - 2xy = 3yx - 2yx$ et par conséquent, $xy = yx$.

Références