Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

28 mars 2024

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soit un anneau $(A, +, \times)$. On dit qu'il est régulier lorsque

$$\forall u \in A, \exists x \in A : u = uxu.$$

1. Si l'anneau A est intègre, montrer que A est régulier si et seulement si A est un corps.
2. Si A est un anneau, on définit son centre $Z(A)$ par ;

$$Z(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A, ax = xa\}$$

- (a) Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A .
- (b) On suppose désormais que A est un anneau régulier. Soit $u \in Z(A)$ et $x \in A$ tel que $u = uxu$. On pose $y = xux$.
 - i. Calculer pour $a \in A$, $uxa(1 - ux)$ et $(1 - ux)aux$ et en déduire que $ux \in Z(A)$.
 - ii. Montrer que $y = xux \in Z(A)$.
 - iii. Montrer que si A est un anneau régulier, son centre $Z(A)$ est également un anneau régulier.

Références