Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On pose

$$\varphi : \begin{cases} A & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto a^2 \end{cases}$$

Montrer que si φ est un morphisme d'anneaux surjectif, alors A est commutatif.

Solution : L'application φ est un morphisme d'anneaux donc $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ ou encore $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ soit $ab + ba = 0$ et ce pour tous $a, b \in A$. On a aussi $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ soit $(xy)^2 = x^2y^2$ autrement dit $x^2y^2 = xyxy = x(-xy)y = -x^2y^2 = y^2x^2$. Soit $a, b \in A$. Comme φ est surjectif, $\exists x, y \in A, a = \varphi(x)$ et $b = \varphi(y)$. La dernière égalité s'écrit $ab = ba$ ce qu'il fallait vérifier.

Références