Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

17 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un anneau $(A, +, \times)$ et deux éléments a, b de A.

1. *Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1-ab$ est inversible et déterminer $(1-ab)^{-1}$.*
2. *Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1-ba)^{-1}$ en fonction de $(1-ab)^{-1}$.*
3. *On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1-ab$ est inversible, alors $1-ba$ est également inversible.*

Solution :

1. *On a $(1-ab)^{-1} = 1 + ab + abab + \cdots + \underbrace{abab\ldots ab}_{n-1 \text{ facteurs } ab}$ si ab est nilpotent d'indice n ;*
2. *On a aussi $(1-ba)^{-1} = 1 + ba + baba + \cdots + \underbrace{baba\ldots ba}_{p-1 \text{ facteurs } ba}$ si ba est nilpotent d'indice p. Donc, si ab est nilpotent d'indice n et si ba est nilpotent d'indice p, on peut écrire les formules précédentes pour $q = \max(n, p)$:*

$$(1-ba)^{-1} = 1 + b(1 + ab + abab + \cdots + abab\ldots ab)a = 1 + b(1-ab)^{-1}a$$

3. *Posons $c = (1-ab)^{-1}$. Montrons que $(1-ba)$ est inversible et que $\boxed{(1-ba)^{-1} = 1 + bca}$. Pour cela, calculons*

$$(1-ba)(1+bca) = 1 - ba + bca - babca = 1 + b[-1 + (1-ab)c]a = 1 + b \times 0 \times a = 1$$

$$(1+bca)(1-ba) = 1 - ba + bca - bcaba = 1 + b[-1 + c(1-ab)]a = 1$$

Références