

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit un anneau $(A, +, \times)$ et deux éléments a, b de A .

1. Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1 - ab$ est inversible et déterminer $(1 - ab)^{-1}$.
2. Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1 - ba)^{-1}$ en fonction de $(1 - ab)^{-1}$.
3. On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est également inversible.

Solution :

1. On a $(1 - ab)^{-1} = 1 + ab + abab + \dots + \underbrace{abab \dots ab}_{n-1 \text{ facteurs } ab}$ si ab est nilpotent d'indice n ;

2. On a aussi $(1 - ba)^{-1} = 1 + ba + baba + \dots + \underbrace{baba \dots ba}_{p-1 \text{ facteurs } ba}$ si ba est nilpotent d'indice p . Donc, si ab est nilpotent d'indice n et si ba est nilpotent d'indice p , on peut écrire les formules précédentes pour $q = \max(n, p)$:

$$(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 + ab + abab + \dots + abab \dots ab)a = 1 + b(1 - ab)^{-1}a$$

3. Posons $c = (1 - ab)^{-1}$. Montrons que $(1 - ba)$ est inversible et que $(1 - ba)^{-1} = 1 + bca$.
Pour cela, calculons

$$(1 - ba)(1 + bca) = 1 - ba + bca - babca = 1 + b[-1 + (1 - ab)c]a = 1 + b \times 0 \times a = 1$$

$$(1 + bca)(1 - ba) = 1 - ba + bca - bcaba = 1 + b[-1 + c(1 - ab)]a = 1$$

Références