Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit un anneau $(A,+,\times)$. Rappelons qu'un élément $a \in A$ est nilpotent *s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.*

1. *Montrer que si a est nilpotent, alors $1-a$ est inversible et calculer son inverse.*
2. *Montrer que si a et b sont nilpotents et commutent, alors ab et $a+b$ sont nilpotents.*
3. *Soit un élément $a \in A$. On définit l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A \\ x & \rightarrow & u(x) = ax - xa \end{array} \right.$. Calculer l'application $u^p = \underbrace{uo\dots ou}_{p \text{ fois}}$.*
4. *Montrer que si a est nilpotent , il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit l'application nulle.*

Indication 0.0 : Pour 3., commencer par déterminer u^2, u^3, puis deviner la formule générale que l'on démontrera par récurrence.

Solution :

1. *Si $a^n = 0$, alors $(1-a)\left(1+a+\dots+a^{n-1}\right) = \left(1+a+\dots+a^{n-1}\right)(1-a) = 1-a^n = 1$. Donc $1+a+\dots+a^{n-1}$ est l'inverse de $1-a$.*
2. *Puisque a et b commutent, on a $(ab)^n = a^n b^n$. Si $a^n = 0$, alors on a $(ab)^n = 0$, ce qu'il fallait vérifier.*
   Puisque a et b commutent, on peut appliquer la formule du binôme : $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$. Si $a^n = 0$ et $b^m = 0$, alors en prenant $p = n+m$, pour tout entier k variant de 0 à p, on a $k \geqslant n$ - auquel cas $a^k = 0$ - ou $p-k \geqslant m$ - et dans ce cas $b^{p-k} = 0$. Tous les termes $\binom{p}{k} a^k b^{p-k}$ sont donc nuls et $(a+b)^p = 0$, ce qu'il fallait vérifier.
3. *Montrer par récurrence que*

$$\forall x \in A, \quad u^p(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k a^{p-k} x a^k.$$

4. *Si l'on choisit alors* $p \geqslant 2n-1$*, pour* $k \geqslant n$, $a^{p-k}xa^k = 0$*, et si* $k \leqslant n-1$*, alors* $p-k \geqslant p-n+1 \geqslant n$ *et alors on a également* $a^{p-k}xa^k = 0$*. Finalement, tous les termes de la somme sont nuls, et ceci quel que soit* $x \in A$*. Donc* $u^p = 0$*.*

Références