Anneau de Boole

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

15 mars 2023

Exercice 0.1 ★ ***Anneau de Boole***

On considère une anneau de Boole $(A, +, \times)$, c'est-à-dire un anneau non réduit à $\{0\}$ tel que tout élément est idempotent, c'est-à-dire vérifie : $\forall x \in A, \quad x^2 = x$.

1. *Montrer que :* $\forall (x, y) \in A^2, \quad xy + yx = 0_A$ *et en déduire que* $\forall x \in A, x + x = 0_A$. *En déduire que l'anneau A est commutatif.*
2. *Montrer que la relation binaire définie sur A par* $x \preccurlyeq y \iff yx = x$ *est une relation d'ordre.*
3. *Montrer que* $\forall (x, y) \in A^2, \quad xy\,(x + y) = 0_A$. *En déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut avoir que deux éléments.*

Solution :

1. *Pour tout $x, y \in A$, on a* $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$. *En soustrayant $x + y$ aux deux membres, on a bien $xy + yx = 0$.*
   On prend $y = x$, on obtient $x^2 + x^2 = 0$ soit $x + x = 0$, ceci quel que soit $x \in A$.
   On a $xy + yx = 0$, d'où en ajoutant xy à chaque membre, $xy + xy + yx = xy$ d'où $0 + yx = xy$ ce qu'il fallait vérifier.
2. *Réflexive : On a $x^2 = x$ donc $x \preccurlyeq x$.*
   Antisymétrique : On suppose $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. On a donc $yx = x$ et $xy = y$. Comme la multiplication est commutative on en déduit $x = y$.
   Transitive : On suppose $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. On a donc $yx = x$ et $zy = y$. On en déduit $zx = z(yx) = (zy)x = yx = x$, soit $x \preccurlyeq z$.
   Donc $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
3. *Soit $x, y \in A$. On a $xy(x + y) = x^2y + xy^2 = xy + xy = 0_A$.*
   Supposons A intègre. Soit x et y deux éléments non nuls. On a, d'après la question précédente, $x + y = 0$, donc en additionnant x à chaque membre, $x + x + y = x$, et comme $x + x = 0_A$, $y = x$. Il n'y a donc qu'un seul élément non nul au plus. Ce qu'il fallait démontrer.

Références