

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

On définit sur $\mathbb{Z}^2$ deux lois de composition internes notées $+$ et $\star$ et définies, pour tout $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$, par :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{et} \quad (a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif.
2. Montrer que $A = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$

Solution :

1. — Les deux lois sont internes.
— L'addition est commutative, associative, admet $(0, 0)$ comme élément neutre et (a, b) admet $(-a, -b)$ comme opposé.
— Associativité de la loi $\star$: $((a, b) \star (c, d)) \star (f, g) = (ac, ad + bc) \star (f, g) = (acf, acg + (ad + bc)f) = (acf, acg + adf + bcf)$ et $(a, b) \star ((c, d) \star (f, g)) = (a, b) \star (cf, cg + df) = (acf, a(cg + df) + bcf) = (acf, acg + adf + bcf)$, ce qu'il fallait vérifier.
— La loi $\star$ est commutative, et admet $(1, 0)$ comme élément neutre.
— Distributivité : $(a, b) \star ((c, d) + (f, g)) = (a, b) \star (c + f, d + g) = (a(c + f), a(d + g) + b(c + f)) = (ac + af, (ad + bc) + (ag + bf)) = (a, b) \star (c, d) + (a, b) \star (f, g)$, ce qu'il fallait vérifier.

Donc $(\mathbb{Z}^2, +, \star)$ est un anneau commutatif.

2. On vérifie facilement que A est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$, que A est stable pour $\star$ et que $(1, 0) \in A$.

Références