Corps à 4 éléments

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Corps à 4 éléments***

On se propose de construire un corps $(\mathbb{F}_4, +, \times)$ sur un ensemble à quatre éléments :$\{0, 1, x, y\}$.

1. *En calculant $1 \times x \times y$ de deux façons différentes, démontrer que $x^3 = 1$.*
2. *Démontrer que nécessairement $x^2 = y$ et que $y^2 = x$.*
3. *En déduire la table du groupe $(\mathbb{F}_4^\star, \times)$.*
4. *Démontrer que nécessairement $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.*
5. *En déduire que $1 + 1 = x + x = y + y = 0$.*
6. *En déduire la table du groupe $(\mathbb{F}_4, +)$.*
7. *Démontrer que l'on a bien construit un corps à quatre éléments.*

Solution :

1. *Comme l'application τ_x de $\mathbb{F}_4^\star$ dans lui-même, définie par $\tau_x(t) = x \times t$ est une bijection, de bijection réciproque $\tau_{x^{-1}}$ on a*

$$1 \times x \times y = \tau_x(1) \times \tau_x(x) \times \tau_x(y) = (x \times 1) \times (x \times x) \times (x \times y) = x^3 \times (1 \times x \times y),$$

on en déduit, en simplifiant par $1 \times x \times y$, que $x^3 = 1$.

2. *Comme $x \neq 0$, on a $x \not= 0$ puisqu'un corps est intègre. On a aussi $x^2 \neq x$. En effet, sinon on aurait $(x - 1) \times x = 0$ d'où $x = 1$ ou $x = 0$, absurde. Supposons $x^2 = 1$. On aurait alors $x^3 = x$ en contradiction avec la question précédente. Donc $x^2 = y$. Pour les mêmes raisons, $y^2 = x$.*

$\times$	1	x	y
1	1	x	y
x	x	y	1
y	y	1	x

3.

Remarque : Un argument plus savant aurait été : il n'existe qu'une seule loi de groupe possible sur un ensemble à trois éléments.

4. *Cette fois on calcule*

$$S = 0 + 1 + x + y = (0 + 1) + (1 + 1) + (1 + x) + (1 + y) = 1 + 1 + 1 + 1 + S,$$

d'où $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

5. *On a* $1+1 \neq 1$. *Supposons* $1+1 = x$, *en élevant au carré, on aurait* $1+1+1+1 = x^2 = y$ *soit* $y = 0$, *absurde. De même* $1 + 1 = y$ *n'est pas possible. Il ne reste qu'une seule possibilité :* $1 + 1 = 0$. *En multipliant cette égalité par* x *puis par* y, *on obtient* $x + x = 0$ *et* $y + y = 0$.

6. *On a* $1 + 0 = 1$ *donc* $1 + x \neq 1$, *on a* $1 + 1 = 0$ *donc* $1 + x \neq 0$ *on a* $1 \neq 0$ *donc* $1 + x \neq x$. *Il reste une seule possibilité pour* $1 + x$, *donc on a nécessairement* $1 + x = y$ *et en ajoutant 1 aux deux membres,* $x = 1 + y$. *On a donc la table du groupe* $(\mathbb{F}_4, +)$.

$+$	0	1	x	y
0	0	1	x	y
1	1	0	y	x
x	x	y	0	1
y	y	x	1	0

7. *Il reste à vérifier la distributivité,* $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$, *ce qui donne a priori* $4^3 = 64$ *vérifications. Les cas où* $c = 0$ *ou* $c = 1$ *sont évidents, même chose si* $a = 0$ *ou* $b = 0$ *ou* $a = b$. *Il reste donc trois possibilités pour* a, *deux pour* b *donc six pour* (a, b). *La commutativité de* $+$ *divise le nombre de cas par deux. Comme il y a deux choix pour* c, *il y a au total six vérifications à effectuer.*

   — $(1 + x) \times x = y \times x = 1$ *et* $1 \times x + x \times x = x + y = 1$.
   — $(1 + x) \times y = y \times y = x$ *et* $1 \times y + x \times y = y + 1 = x$.
   — $(1 + y) \times x = x \times x = y$ *et* $1 \times x + y \times x = x + 1 = y$.
   — $(1 + y) \times y = x \times y = 1$ *et* $1 \times y + y \times y = y + x = 1$.
   — $(x + y) \times x = 1 \times x = x$ *et* $x \times x + y \times x = y + 1 = x$.
   — $(x + y) \times y = 1 \times y = y$ *et* $x \times y + y \times y = 1 + x = y$.

Références