# Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

***Exercice 0.1*** ★★★ ***Pas de titre***

*Étudier la fonction définie par :*

$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

***Solution :***

1. *Pour que la racine soit définie, il faut que* $x \in [-1,1]$.
2. arcsin *est définie sur* $[-1,1]$. *Étudions donc* $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ *sur* $[-1,1]$. *C'est une fonction impaire. Il suffit de faire l'étude sur* $[0,1]$. $\varphi$ *est dérivable sur* $[0,1[$ *et* $\forall x \in [0,1[$,

   $$\varphi'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

   *On écrit le tableau de variations de* $\varphi$ *et on voit que*

   $$\forall x \in [-1,1], \quad \varphi(x) \in [-1,1]$$

   *avec* $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$.

   *Par conséquent,* $D_f = [-1,1]$.
3. $f$ *est impaire. On fait l'étude sur* $[0,1]$.
4. $\varphi$ *est dérivable sur* $]-1,1[$. *Comme* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$, *à valeurs dans* $[-1,1]$ *et* $\varphi(\theta) = 1$ *si et seulement si* $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *On en déduit que* $f$ *est dérivable sur* $I_1 = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ *et sur* $I_2 = ]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1[$.
5. $\forall x \in I_1 \cup I_2$, *on calcule*

   $$f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{|2x^2-1|\sqrt{1-x^2}}$$

   *Par conséquent,* $\forall x \in I_1$, $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\forall x \in I_2$, $f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. *Donc il existe* $C_1 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in I_1, \quad f(x) = 2\arcsin x + C_1$$

*et* $\exists C_2 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in I_2, \quad f(x) = -2\arcsin x + C_2$$

*On détermine* $C_1 = 0$ *et* $C_2 = \pi$ *en prenant les valeurs particulières* $x = 0$ *et* $x = 1$.

7. *En conclusion :*

$$f(x) = \begin{cases} 2\arcsin x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ -2\arcsin x - \pi & \text{si } x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \end{cases}$$

*Montrons en utilisant la trigonométrie que*

$$\forall x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}], \quad \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\arcsin x$$

*Soit* $x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. *Posons*

$$y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

$\exists! \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *tel que*

$$x = \sin\theta$$

*Alors*

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta|\cos\theta| = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

*Or comme* $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$y = \arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta = 2\arcsin x$$

# Références