Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}{\cdot}+)$ *vers* $(\mathbb{Z},+)$.

Solution : *Soit* f *un tel morphisme. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

or $p = f(1) \in \mathbb{Z}$ *et* $q_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \in \mathbb{Z}$. *Donc*

$$p = nq_n \Rightarrow |p| = n|q_n|$$

Cette relation étant vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, *en particulier pour* $n > |p|$, *on obtient que* $p = f(1) = 0$ *et que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Alors, si $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$, *avec* $a \in \mathbb{N}$ *et* $b \in \mathbb{N}^\star$,

$$f(x) = f\left(a\frac{1}{b}\right) = af\left(\frac{1}{b}\right) = 0.$$

On en déduit que f *est nulle sur* $\mathbb{Q}_+$, *et puisque* f *est un morphisme,* $f(-x) = -f(x)$ *ce qui montre que* f *est également nulle sur* $\mathbb{Q}_-$.

Références