Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 février 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère deux groupes G et G' et une application $\varphi : G \mapsto G'$. On définit l'ensemble

$$H = \big\{ \big(x, \varphi(x)\big) \mid x \in G \big\}$$

Montrer l'équivalence

$$\underbrace{\big(\varphi \text{ morphisme }\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(H \text{ sous-groupe de } G \times G'\big)}_{(ii)}$$

Solution :

1. *Puisque φ est un morphisme, on sait que $\varphi(e) = e'$. Donc $(e, e') = (e, \varphi(e)) \in H$. Soient deux éléments X, Y de H. Il existe $(x, y) \in G^2$ tels que $X = (x, \varphi(x))$ et $Y = (y, \varphi(y))$. Comme l'inverse de $(y, \varphi(y))$ est $(y^{-1}, \varphi(y))^{-1}$,*

$$XY^{-1} = (x, \varphi(x))(y, \varphi(y))^{-1} = (xy^{-1}, \varphi(x)\varphi(y)^{-1}) = (xy^{-1}, \varphi(xy^{-1})) \in H$$

   On a utilisé la propriété d'un morphisme, $\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)^{-1}$.

2. *Soit $(x, y) \in G^2$, montrons que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Puisque $(x, \varphi(x)) \in H$ et que $(y, \varphi(y)) \in H$, comme H est un sous-groupe de $G \times G'$, $(x, \varphi(x))(y, \varphi(y)) = (xy, \varphi(x)\varphi(y)) \in H$. Mais alors, par définition de H, il existe $z \in G$ tel que $xy = z$ et $\varphi(z) = \varphi(x)\varphi(y)$. Cela donne $\varphi(xy) = \varphi(z) = \varphi(x)\varphi(y)$.*

Références