Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère un groupe $(G, .)$. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe G est commutatif.

Solution : *L'application f est bijective (vérification immédiate).*

1. *Montrons que si G est commutatif, alors f est un morphisme. Soient deux éléments $(x, y) \in G^2$. Alors*
$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$
2. *Montrons que si l'application f est un morphisme de groupes, alors le groupe G est commutatif. Soient deux éléments $(x, y) \in G^2$. Puisque*
$$f(x^{-1}y^{-1}) = f(x^{-1})f(y^{-1}) \Rightarrow (x^{-1}y^{-1})^{-1} = xy \Rightarrow (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = xy \Rightarrow yx = xy$$
et donc la loi est commutative.

Références