Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

19 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe $e^{ix} \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est un morphisme de groupes. Calculer son noyau et son image. L'application f est-elle injective ?

Solution : *On a* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array} \right.$. *Vérifions que f est un morphisme de groupe. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, alors*

$$f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = f(x) \times f(y),$$

et

$$f(x^{-1}) = e^{i(-x)} = \frac{1}{e^{ix}} = f(x)^{-1}.$$

Donc f est un morphisme de groupe.

Montrons que f n'est pas injective en prouvant que le noyau n'est pas réduit à 0 :

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = 1\right\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Enfin

$$\operatorname{Im} f = \left\{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{U}$$

est l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Références