Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $(G, \times)$ un groupe (noté multiplicativement). Pour $a \in G$, soit $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array} \right.$.

1. *Montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G, \times)$.*
2. *Vérifier que $\forall (a, b) \in G^2, \quad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.*
3. *Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.*
4. *En déduire que $\mathscr{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.*

Solution :

1. *Soient $a, x, y \in G$, on a $\tau_a(xy) = a(xy)a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \tau_a(x)\tau_a(y)$ ce qu'il fallait vérifier.*
2. *Soient $a, x, y \in G$, on a $\tau_a \circ \tau_b(x) = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1} = \tau_{ab}(x)$ puisque $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*
3. *On en déduit que $\tau_a \circ \tau_{a^{-1}} = \tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = \tau_e = Id_G$. Donc τ_a est bijective et son application réciproque est $\tau_{a^{-1}}$.*
4. *On en déduit que $\tau \ : a \longmapsto \tau_a$ est un morphisme de G dans le groupe des automorphismes de G. Son image, à savoir T est un sous-groupe du groupe des automorphismes de G.*

Références