

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Étudier la fonction f donnée par :

$$f : x \mapsto \cos^3 x + \sin^3 x.$$

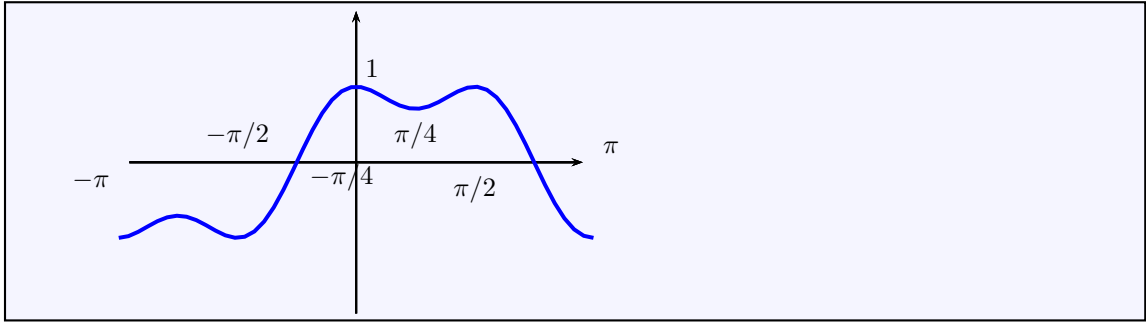
Solution : Étudions $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin^3 x$. f est définie sur \mathbb{R} mais est 2π -périodique. On peut donc restreindre le domaine d'étude à $I = [-\pi, \pi]$. Si $x \in I$, $f'(x) = 3 \cos x \sin x (\sin x - \cos x)$. Résolvons l'inéquation : $\sin x - \cos x \geq 0$ pour $x \in I$ afin de connaître le signe de f sur I :

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &\in \left[-\pi, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right] \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	-	-	-	+	+	+	+
$\cos x$	-	-	+	+	+	+	-
$\sin x - \cos x$	+	-	-	-	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
f	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	-1

ainsi que le graphe :



Références