Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$. *Montrer que* f *est un endomorphisme du groupe* $(\mathbb{R}^*, \times)$. *Déterminer son image et son noyau.*

Solution : *Endo : Il s'agit de démontrer que* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \in \mathbb{R}^*$.
Morphisme : Il s'agit de démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ f(x)f(y) = f(xy)$ *soit* $x^n y^n = (xy)^n$.
Si n *est impair, l'image est* $\mathbb{R}^*$ *et le noyau est réduit à* $\{1\}$. *Si* n *est pair, l'image est* $\mathbb{R}_+^*$ *et le noyau est* $\{-1, 1\}$.

Références